SUJET 15 : BAC 2011 TSM
MATHEMATIQUE

A) Dans un système de numération de base a, on considère les nombres :
$A=\overline{211}$, $B=\overline{312}$, $C=\overline{133032}$
1. Expliquer pourquoi a doit être supérieur à 3.
2. a) Sachant que C=A×B, montré que $a^3 - 3a^3 - 2a - 8 = 0$. En déduire que a divise 8.
   b) Déterminer alors a.
3. L'écriture d'un nombre dans le système décimal est 214, écrire ce nombre dans la base de 4.
4. Dans cette question, on suppose que a=4.
   a) Ecrire A, B et C dans le système décimal.
   b) Montrer alors que C=A×B=PPCM (A ;B). En déduire que l'équation $Ax+By=1$ a des solutions dans Z^2.
5. On considère dans Z^2 l'équation $37x+54y=1$.
   Vérifier que (19 ; -13) est une solution de cette équation
   Résoudre cette équation

B) Deux chasseurs Moussa et Mamadou, aperçoivent ensemble un lièvre et tirent simultanément.
1. Sachant que Moussa atteint et tue d'habitude 5 lièvres sur 6 et Mamadou 4 sur 5, quelle est la probabilité pour que le lièvre soit tué ?
2. En fait, Mamadou a tiré le premier.
   a) Quelle est la probabilité pour que Moussa tue le lièvre sachant que, si Mamadou tire et manque, les chances normales pour Moussa d'atteindre le lièvre se trouvent diminuer de moitié.
   b) Dans ces conditions, Mamadou a tiré le premier, puis Moussa, quelle est la probabilité pour le lièvre d'en échapper sain et sauf ?

(C) Soit g la fonction définie par : $g(x)=x+\sqrt{x^2+1}$

1. a) Déterminer l'ensemble de définition D_g de g et démontrer que : $\forall x \in D_g$, $g(x) > x + |x|$

b) En déduire le signe de g sur D_g

2. Etudier g et tracer sa courbe représentative.

3. Soit φ la fonction définie par : $\varphi(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

a) Résoudre l'équation : : $\varphi(x) = -\ln(3 - 2\sqrt{2})$ et démontrer que φ *impaire*.

b) Etudier φ et tracer sa courbe représentative.

c) Démontrer que φ est une bijection de R vers R et que :

$\forall\, n \in Z, \varphi\left(\frac{e^n - e^{-n}}{2}\right) = n$

4. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère l'intégrale I_n définie par :

$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx$

a) Calculer I_2 et démontrer, à l'aide d'une intégration parties que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)\, I_n$

b) Etablir que pour tout nombre réel $x \in [1;2]$, $0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$

c) En déduire un encadrement de I_n, puis étudier la limite éventuelle de la suite (I_n)

D) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

SAVOIR GUINEE

Soit s la similitude directe de centre I, transformant les points A et B d'affixes respectives 3+i, 3-i en A' et B' d'affixes respectives 2+5i, 4+3i

1. Déterminer les éléments caractéristiques de s
2. Déterminer le barycentre des points I, A , B affectés respectivement de coefficients 6, 1,1. En déduire le barycentre des points I, A', B' affectés des mêmes coefficients respectifs.

b) vérifier que : $f(\varphi) = -\beta$

c) calculer la limite de f en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f.

4. Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (o, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$). On placera en particulier les points d'abscisses :

1 ;3 ;4 ; e^2 ; 12. On prendra :

ln(0,27)≈1,31 ;ln(0,28) ≈ -1,27 ; ln2≈0,7 ; ln3≈1,1 ; ln5≈1,6.

II-) 1.a) Démontrer que l'équation $f(x)$=1 et $e^{1+\frac{1}{x}}$

2. Soit g la fonction dérivable sur]0 ; $+\infty$[et définie pour tout réel strictement positif x par :

g(x)= $e^{1+\frac{1}{x}}$

Soit (*Un*) *la suite définie par : Un=3 et la raison de récurrence* U_{n+1}= *g(Un).*

Démontrer par récurrence que : $\forall n \in N$, $U_n \in [3\,;4]$; *sachant que* $x \in [3\,;4], g(x) \in [3\,;4]$