SUJET 16 : BAC 2012 TSM
MATHEMATIQUE

Exercice 1

1. Calculer le PGDC de 4^5-4^6-1

Soit *(Un)* la suite numérique définie par U_0=1, U_1=5 et pour tout entier naturel n, $U_{n+2}= 5U_{n+1}-4U_n$.

2. Calculer les temps U_2, U_3 et U_4, de la suite (U_n)
3. a) Montrer que la suite *(Un)* vérifie, pour tout entier naturel n, $U_{n+1}= 4U_{n+1}$
   b) Montrer que, pour tout entier naturel n, U_n est un entier naturel.
   c) En déduire, pour tout entier naturel n, le PGCD de U_n et U_{n+1}

4. Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $\boldsymbol{V_n=U_n+\frac{1}{3}}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme V_0

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c) Déterminer, pour tout entier naturel n, le PGCD de $4^{n+1}-1$ et 4^n-1

EXERCICE 2

A tout point M du plan de coordonnées (x,y) on associe son affixe Z = $x+iy$

Soit s l'application du plan dans lui-même qui à tout M d'affixe Z associe le point M_1 d'affixe Z_1 telle que : $Z_1=(-1+i)Z+1+4i$

1. Donner la nature de s et déterminer ses éléments caractéristiques.
2. Calculer les coordonnées x et y du point M en fonction de x_1 *et* y_1 de M_1
3. Déterminer les équations des transformées par s de la droite $x=0$ *et* de la droite *(D')* d'équation $y=x-1$

PROBLEME :

A-) On considère la fonction g définie sur]0 ; +∞[par g(0)= 1 et $\forall\, x \in R, g(x) = 1 + x - xlnx$

2. Etudier les variations de g et donner son tableau de variation.

3.a) Démontrer que l'équation g(x)=0 admet une solution unique β ∈]0 ; +∞[.

b) Justifier que $3{,}5 < \beta < 3{,}6$

4. Tracer (C_g).

B-) On considère la fonction f définie par : ∀ x ∈]0 ; +∞[, $f(x)=\boldsymbol{\frac{lnx}{1+x}+2}$

1. a) Démontrer que ∀ x ∈[0 ; +∞[, $f'(x)=\boldsymbol{\frac{g(x)}{x(1+x)^2}}$
   b) Dresser le tableau de variation de f.

2. Déterminer les coordonnées du point d'intercession A de la courbe (C_f) avec la droite (D) d'équation $y=2$.

3. Construire la courbe (C_f) dans le repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

C-a) Justifier que $ln\beta = \frac{\beta+1}{\beta}$

b) A l'aide d'une intégrale par parties, démontrer que : $\int_1^\beta xlnxdx = \frac{(\beta+1)^2}{4}$