SUJET 17 : BAC 2013 TSM
MATHEMATIQUE

EXERCICE 1 :

1. On considère l'équation (E) : $8x+5y=1$ où $(x\ ;\ y)$ est un couple de nombres entiers relatifs
   Donner une solution particulière de l'équation (E) et résoudre l'équation (E).
2. Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple $(a\ ;\ b)$ *de* nombres entiers vérifiant :

$$\begin{cases} N=8a+1 \\ N=5b+2 \end{cases}$$

a)

b) Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?

3. Résoudre l'équation : $8x+5y=100$, $(x\ ;\ y) \in \mathbb{Z}^2$

EXERCICE 2 :

On considère dans le plan, un triangle ABC rectangle en A tel que AB=2a *et* AC=a où a est un nombre réel strictement positif donné.

1.a) Déterminer et construire le barycentre G des points pondérés (A ; 1), (B ;-1) et (C ; 1).

b) Déterminer et construire l'ensemble (C) des points du plan tels que : $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\|$

2. Soit H le point du plan défini par : $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

Démontrer que le point H est le barycentre des points pondérés (A ; 3), (B ; 1) et (C ; -2)

PROBLEME

On considère la fonction f définie par :

$f(x)=\frac{x^2}{2}+x-2x\ln x$ si $x \in]0\ ;+\infty[$ et $f(0)=0$

On appelle (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

A-) On considère la fonction numérique g définie sur]0 ; +∞ [par : $g(x)= x-1-2\ln x$

1. Calculer les limites respectives de g à droite en 0 et en +∞.
2. On admet que la fonction g est dérivable sur]0 ; +∞ [et on note g' sa dérivée.
   Déterminer g' et étudier son signe.
   En déduire le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
   Vérifier que g(1)=0
3. Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]3;4[$ *et* $g(\alpha)=0$.
4. Déduire des questions précédentes le signe $g(x)$suivant les valeurs de x.

B) On considère la fonction numérique h définie et dérivable sur]0 ; +∞ [par : $h(x)= 2\ln x+1$

1. Démontrer que $\forall\ x \in]3;4[$ et $h(x) \in]3;4[$

2. On considère la suite $(Un)_{n\in N}$définie par :

$$\begin{cases} U_0=3,5 \\ U_{n+1}=h(U_n) \end{cases}$$

a) Démontrer que : $\forall\ n \in N, U_n]3;4[$

b) Calculer l'arrondi d'ordre 3 de U_1

Démontrer que par récurrence que la suite $(Un)_{n\in N}$ est croissante.

c) En déduire que la suite $(Un)_{n\in N}$ est convergent.
(On admettra que la suite $(Un)_{n\in N}$ converge vers la valeur α précédente et on prendra α=3,5)

C-1) Démontrer que la fonction f est continue à droite en 0 ?

2. La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?
Justifier votre réponse. En donner une interprétation graphique.
3. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
4. Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x vers $+\infty$, puis interpréter graphiquement ce résultat.
5. La fonction f est dérivable sur$]0\,;+\infty[$ et on note f' sa dérivée.
Démontrer que : $\forall\, x \in]0\,;+\infty[\; f'(x) = g(x)$
6. En utilisant les résultats de A, déterminer le signe de f' t dresser le tableau de variation de f.
Tracer la courbe *(C)*.
7. Soit t un nombre réel tel que : $0 < t < 1$.
En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire A(t) de la partie du plan comprise entre la courbe *(C)*, la droite (OI) et les droites d'équations $x=t$ *et* $x=1$
Calculer la limite de A(t) quand t vers 0