SUJET 19 : BAC 2015 TSM
MATHEMATIQUE

Exercice 1

1) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

2) Démontrer que pour tout entier naturel n : $10^{9n+2} + 10^{6n+1} + 1$ est divisible par 111.

3-a) Décomposer 469 en produit de facteurs premiers.

b) Résoudre dans N^2 l'équation :$x^3 - y^3 = 469$

Exercice 2

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(0, \vec{u}, \vec{v})$direct.
Soit z∈ C où C *désigne l'ensemble des nombres complexes. Posons*
Z= *x + iy, x et y réels.*

1) Soit M(z) un point du plan complexe *et M'*(z') l'image de M par la rotation de centre 0 et d'angleθ. Exprimer z' en fonction de z et θ.
2) On considère dans C l'équation (E) d'inconnue z qui suit,
(E) :$\frac{1}{2}z^2 + 4z\sqrt{3} + 32 = 0$
Résoudre l'équation (E)
1) On considère les points A et B d'affixes respectives $a = -4\sqrt{3} - 4i$ *et b*= $a = -4\sqrt{3} + 4i$
Calculer OA, OB et AB. En déduire la nature du triangle OAB.

4) On désigne par C le point d'affixe c=$\sqrt{3} + i$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle$\frac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe du point D.

5) On appelle G le barycentre des points pondérés *(0 ;1) ;(D,* -1)*et (B,* -1).

a) Montrer que le point G a pour affixe q=$-4\sqrt{3} + 6i$

b) Placer les points A, B ,C et G sur une figure(unité graphique 1*cm*)

6) Déterminer une mesure en radians de l'angle $(\widehat{GA}, \widehat{GC})$.
En déduire la nature du triangle GAC.

PROBLEME

Partie A

Soit la fonction numérique dérivable sur]0 ;+∞[et définie par :

$g(x) = \frac{\mathbf{2x+1}}{\mathbf{x^2}} + lnx$

1-*a*) calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ b) calculer $\lim\limits_{x \to \mathbf{0}^+} g(x)$

2-*a*) Démontrer que :$\forall x \in]0 ;+\infty[$, $g'(x) = \frac{\mathbf{x^2+2x+2}}{\mathbf{x^3}}$

b) En déduire le sens de variation de g.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

3-a) Démontrer que l'équation *g (x)=0*,$\forall x \in]0 ;+\infty[$ admet une solution unique.

b) Justifier que $2{,}55 < a < 2{,}56$

c) Démontrer que :$\begin{cases} \forall x \in]a; +\infty[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]a; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

On considère la fonction f dérivable sur]0 ;+∞[et définie par :

f(x)=$(\frac{1}{x} - lnx)e^{-x}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

(Unité graphique : OI=2*cm et OJ=10 cm).*

1-*a*) calculer $\lim_{x \to \mathbf{0}^{>}} f(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat.

b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat.

2) Démontrer que : *f (x)*=$-\frac{\mathbf{1+a}}{\mathbf{a^2}}\boldsymbol{e^{-a}}$

3-a) Démontrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \boldsymbol{e^{-a}} \times g(x)$

b) En utilisant la partie A, déterminer les variations de f.

c) Dresser le tableau de variation de f.

4) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1 est

y=$-\frac{3}{e} + \frac{4}{e}$

5) Construire (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}). On\ prendra = 2{,}6.$

Partie C

Soit h la fonction dérivable sur $]0; +\infty[$ et définie par: $\mathrm{h}(x) = e^{-x}lnx$

Démontrer que h est une primitive de sur $]0; +\infty[$.

Soit Υ un nombre réel tel $\Upsilon > 3$.

a) Calculer, en *cm²* et en fonction de Υ, l'aire A(Υ) de la partie du plan comprise entre (C), (OI) et les droites d'équation *x=3 et x=* Υ.

Calculer $\lim_{\Upsilon \to +\infty} A(\Upsilon)$