**MEPU-A** **BACCALAUREAT UNIQUE** **SESSION 2017**
**SNECSO**

**Épreuve de :** Maths **Durée : 2heures** **Coefficient : 4**

**PROFIL :** Sciences Mathématiques

Sujet

Exercice 1 : (**4 points)**

Soit $f$ la fonction definie sur $R_+$ par $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

1) Déterminer une primitive de $f$ sur $R_+$
2) Soit la suite $(U_n)$ definie par $n > 0$ par : $U_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} f(x)dx$. Exprimer $U_n$ en fonction de $n$
3) Montrer que $(U_n)$ est une suite décroissante positive. Que peut-on en déduire ? Calculer la limite de $U_n$ lorsque $n$ tend vers$+\infty$.
4) On pose : $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$
   a) Calculer $S_1, S_2$ $et$ $S_{3.}$ Exprimer $S_n$ en fonction de $n$
   b) Calculer la limite de $S_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

Exercice 2 : **(4 points)**

Une variable aléatoire aléatoire $X$ prend les valeurs 1 ; -1 et 2 avec les probabilités respectives $e^\alpha, e^\beta, e^\Upsilon$, où α, β, ϒ sont en progression arithmétique.

On suppose que l'espérance mathématique $E(X)$ de $X$ est égale a 1.

1) Calculer α, β, ϒ et la variance $V(X)$ de $X$
2) Soient $A, B, C$ trois points d'abscisses respectives 1 ; -1 et 2 d'une droite graduée $(\Delta)$
   a) Calculer l'abscisse du point $G$ barycentre de $\{(A,1),(B,2),(C,4)\}$
   b) On pose ; $\varphi(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$ où $M$ est un point de$(\Delta)$. Montrer que $\varphi(G) = V(X)$
   c) Déterminer l'ensemble $(\Gamma)$ des points $M$ tels que $\varphi(M) = 3$

Problème : **(12 points)**

**Partie A**

On considère la fonction $f$ definie par $R$ par$f(x) = e^{-x}\ln(1 + e^x)$. On note $(C)$ sa courbe representative dans le plan rapporté au repère orthogonal$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. L'unité graphique est $1cm$ sur l'axe des abscisses et $10cm$ sur l'axe des ordonnées.

1) a) On rappelle que$\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$
   c) Vérifier que pour tout réel $x$ : $f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x}\ln(1 + e^{-x})$
   Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$
   d) En déduire que la courbe $(C)$ admet deux asymptotes que l'on précisera.
2) On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par $g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t)$
a) Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$
b) En déduire le signe g(t) lorsque $t > 0$.
3) Calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $g(e^x)$, $f'$ désignant la fonction dérivée de $f$.
En déduire le sens de variation de la fonction $f$ puis dresser son tableau de variation.

4) Tracer les asymptotes a la courbe $(C)$ et la courbe $(C)$.

**Partie B**

Soit $F$ la fonction definie sur $R$ par : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

1) Étudier le sens de variation de la fonction $F$
2) Vérifier que, pour tout nombre réel $t$, $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$ et calculer $\int_0^x \frac{dt}{1+e^t}$
   a) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, le calcul de $F(x)$
   b) Vérifier que $F(x)$ peut s'écrire sous les formes suivantes :
   $F(x) = x - \ln(1 + e^x) - f(x) + 2ln2$ (1)
   $F(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) - f(x) + 2ln2$ (2)
3) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$
4) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} (F(x) - x)$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.
   On donne : $ln2 \approx 0,69$