

SUJET 1 : BAC 1995 TSM

I- On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = \frac{5+3U_n}{3+U_n} \quad n \in \mathbb{N} \quad (1) \end{array} \right.$$

- 1- Calculer U_1, U_2, U_3 et U_4
- 2- Démontrer que pour $n > 1, U_n$ est nombre positif
- 3- Montrer que la suite (U_n) est majorée par $\sqrt{5}$
- 4- Déterminer le sens de variation de (U_n)
- 5- On considère la suite (V_n) définie par :

$$V_n = \frac{U_n - \sqrt{5}}{U_n + \sqrt{5}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on détermine le premier terme et la raison
- b) Calculer la limite de V_n et en déduire celle de U_n

II- Soit la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1 \quad \rightarrow$$

A-I) Quel est l'ensemble de définition de f ?

2- Etudier la dérivabilité de f au point -1

3- Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé

B-I) Expliquer pourquoi f est une bijection de l'ensemble $[-1; +\infty[$ sur un intervalle I que l'on déterminera

Soit f^{-1} l'application réciproque de f . Représenter graphiquement les variations de f^{-1} sur le même graphique que précédemment

2.a) Expliquer f^{-1}

b) f^{-1} est-elle dérivable au point -1 ?

3. Expliquer $(f^{-1})'(x)$:

a) En utilisant l'expression de $f^{-1}(x)$ calculée au 2

b) En utilisant le théorème de la dérivée d'une bijection réciproque