SUJET 13 : BAC 2007 TSM

MATHEMATIQUE

A) 1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \frac{\boldsymbol{(n-1)n(n+1)}}{\boldsymbol{6}}$$

2.a) Décomposer 469 en produits de facteurs premiers.

b) Résoudre dans N^2 l'équation :$\boldsymbol{x^3 - y^3}$**=469**

B) Dans une ville, il y a trois médecins. Quatre habitants de cette ville, malades le même jour, appellent au hasard l'un de ces trois médecins.

1. Quelle est la probabilité pour que qu'un seul médecin soit appelé ?
2. Quelle est la probabilité pour que les trois médecins soient appelés ?

C) Le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormé.

Soit la fonction définie par :

$f\,(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x - 1 + \frac{1}{x}}$, ***si*** $x \leq 1$

$f(x)=x-(\ln x)^2$, *si* $x > 1$

1.a)Démontrer que f est continue et dérivable en 1.

b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les branches infinies de la courbe représentative (C) de f.

c) Etudier les variations de f.

Démontrer que le point d'abscisse e est un point d'inflexion de *(C)*.

a) Tracer (C).

1. Soit h la restriction de f à l'intervalle] 1 ; +∞ [

a) Démontrer que h réalise une bijection de]1 ; +∞ [vers un intervalle que l'on précisera.

b) En déduire que h admet une fonction réciproque $\mathbf{h^{-1}}$ dont on précisera le sens de variation. Tracer la courbe représentative de $\mathbf{h^{-1}}$.

B) 1. Déterminera le module et un argument du nombre complexe

$\boldsymbol{U = \frac{\sqrt{3}+i}{4}}$

2. Soit f l'application de C vers lui-même qui, à tout nombre complexe Z, associe :

f(Z)=UZ+ (1+i) (1-U)

Montrer que f est bijective et déterminer le nombre complexe ω tel que : $\boldsymbol{f\,(\omega) = \omega}$

3. Soit I, M et M' les points du plan complexe ayant pour affixes ω , Z et f(Z) respectivement.

On suppose M différent de I. Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\boldsymbol{IM}},\overrightarrow{\boldsymbol{IM'}})$et calculer la distance IM' en fonction de la distance IM.

On note F l'application qui à point M associe le point M'.

Préciser la nature de F et ses éléments caractéristiques.

4. Soit A_0 le point d'affixe Z_0= -1+2i. On définit, pour tout entier naturel n, $Z_{n+1}=f(Z_n)$

On note A_n le point d'affixe Z_n dans le plan complexe.

Calculer en fonction de n, la distance IA_n. Quelle est la limite de cette distance quand n tend vers +∞.

SAVOIR GUINEE