SUJET 14 : BAC 2009 TSM

MATHEMATIQUE

A) 1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le **PGCD** des nombres **231** et **3311**.

2. Soit n un entier naturel supérieur à 2. On pose :

$\boldsymbol{A(n)=1+2+\cdots n}$ **et** $\boldsymbol{B(n)=1^2+2^2+\cdots+n^2}$

On rappelle que, quel que soit n, $\boldsymbol{A(n)=\frac{n(n+1)}{2}}$

a) Démontrer par récurrence, que quel que soit ***n,*** $\boldsymbol{B(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}}$

b) On suppose que n est un multiple de 3. Déterminer dans ce cas, le PGCD de $A(n)$ et $B(n)$.

c) Vérifier le résultat obtenu dans le cas particulier où n=21.

A) Cinq personnes se donnent rendez-vous dans un des cafés d'un village qui en compte cinq. Chaque personne choisit au hasard l'un des cinq cafés.

1. Calculer la probabilité pour que chacune des personnes ait choisi un café différent.
2. Calculer la probabilité pour que les cinq personnes se trouvent dans le même café.
3. Calculer la probabilité pour qu'au moins deux personnes se trouvent dans le même café.

B) Soit f la fonction numérique définie sur R_+ par :

$\boldsymbol{f(x)= x\ln (x+\frac{1}{x})}$, si $x>0$

$\boldsymbol{f(0)=0}$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1.

b) On considère la fonction g définie pour x appartenant à [1 ; +∞], par : g(x)= $x\ln x$ et on appelle (ɼ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

c) Etudier la limite de *f(x) quand x tend vers* **+∞.**
Montrer que la courbe (C) de f dans le repère $(o,\vec{i},\vec{j})$ et (ɼ) sont asymptotes et préciser leurs positions relatives.

d) Déterminer *f' et f ''*, puis étudier le sens de variation de *f'* et montrer que *f'* est positive.
Achever l'étude de la fonction f.
Tracer *(C)* sur la même figure que (*ɼ*).

C) ABC est un triangle, on pose : BC=*a*, AC=b, AB=c, A' est le milieu du segment [BC] ; B' celui de [AC] ; C'celui de [AB].
Soit G l'isobarycentre des sommes du triangle ABC.

1. Montrer que, pour tout point M du plan :
$MA^2+MB^2, MC^2=3MG+\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$
2. En calculant de deux façons différentes $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})^2$, établissez que: $2\overrightarrow{MAMA'}+\overrightarrow{MBMC}= 3MG^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{6}$

3. On considère les points communs aux cercles de diamètre [AA'] et [BC].

A) Montrer que, lorsqu'ils existent, ils appartiennent à un cercle de centre G dont on donnera le rayon en fonction de a, b, c.