SUJET 14 : BAC 2010 TSM
MATHEMATIQUE

Montrer que le couple (*a ;-b)* est solution de l'équation (E).

EXERCICE 1 :

I-1 Déterminer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} K2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$$

2.a) Résoudre dans Z^2, l'équation : $661x-991y=1$

b) Soit *(Un) et (Vn)* les suites arithmétiques définies par :

$U_0=3$, $V_0=2$

$$\begin{cases} \forall n \in N,\ U_{n+1} = U_n + 991 \\ \forall n \in N,\ V_{n+1} = V_n + 661 \end{cases}$$

Déterminer tous les couples (p,q) d'entiers naturels inférieurs à 2000 tels que $U_p=V_q$

I- Soit ABCD un parallélogramme.

P est le point tel que : $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; Q est le symétrie du milieu de [AD] par rapport à A.

Démontrer que les points P, Q, C sont alignés.

EXCERCICE 2

Soit f la fonction définie sur R_+ par :

$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$

1. Déterminer une primitive de f sur R_+
2. Soit la suite *(Un)* définie pour $n>0$ par :

   $Un=\int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} f(x)dx$

a) Calculer U_1 et U_2. Exprimer U_n en fonction de n.

b) Que représente graphiquement le nombre U_n ?

3. Montrer que (U_n) est une suite décroissante positive.

Que peut-on en déduire. Calculer la limite de cette suite.

4. On pose $S_n=U_1+U_2+\cdots Un$

a) Calculer S_1, S_2, S_3 et S_n en fonction de n.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

PROBLEME

I-) Soit f la fonction définie par :

$f(0)=0$ et pour tout réel strictement positif x, $f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$

1. Etudier la continuité de f et la dérivabilité de f en 0.
2. Soit φ la fonction dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et définie par :
   $\varphi(x)=\ln x+x+1$

a) Etudier le sens de variation de φ.

b) Démontrer que l'équation $\varphi(x)=0$ admet une solution unique β telle que : $0{,}27\leq \beta \leq 0{,}28$ avec $\varphi(0{,}27)=-0{,}04$ et $\varphi(0{,}28)=-0{,}007$

3.a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$. En déduire les variations de f.

b) vérifier que : $f(\varphi)= -\beta$

c) calculer la limite de f en +∞. Dresser le tableau de variation de f.

4. Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (o, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$). On placera en particulier les points d'abscisses :

1 ;3 ;4 ; $\boldsymbol{e^2}$; 12. On prendra :

ln(0,27)≈1,31 ;ln(0,28) ≈ -1,27 ; ln2≈0,7 ; ln3≈1,1 ; ln5≈1,6.

II-) 1.a) Démontrer que l'équation *f(x)*=1 et $\boldsymbol{e^{1+\frac{1}{x}}}$

2. Soit g la fonction dérivable sur]0 ; $+\infty$[et définie pour tout réel strictement positif x par :

g(x)= $\boldsymbol{e^{1+\frac{1}{x}}}$

Soit (*Un*) *la suite définie par : Un=3 et la raison de récurrence U_{n+1}= g(Un).*

Démontrer par récurrence que : $\forall n \in N$, $U_n \in [3\,;4]$; *sachant que* $x \in [3\,;4], g(x) \in [3\,;4]$